Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 3(2) (2016), 17-29

Zadaci sa brojem 2016

Aleksandra B. Simić
Učenik Gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
anasimic99@gmail.com

Dimitrije I. Spasić
Učenik Gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
spasic.dimitrije.3@outlook.com

Jovana D. Krstić
Učenik Gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
jovana.krstic5@outlook.com

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu
Gimnazija „Svetozar Marković“ u Nišu
dsimce@gmail.com

Nenad O. Vesić
Prirodno-matematički fakultet u Nišu
vesic.specijalac@gmail.com

Poštovani đaci i ljubitelji matematike, ovaj rad predstavlja nastavak rada objavljenog u prethodnoj svesci časopisa. Korišćenjem navedene literature autori su se trudili da formulišu i dokažu zanimljive matematičke probleme u kojima se javlja broj tekuće godine. Glavna ideja je da se podstakne na razmišljanje i prikažu različite mogućnosti rešavanja zadataka.

Zadatak 1. Odrediti poslednju cifru broja $15^{2016}+90^{2016}+66^{2016}$.

Rešenje: Poslednje cifre proizvoljnog stepena brojeva 5, 0 i 6 su redom $5, 0$ i 6, pa je poslednja cifra broja $15^{2016}+90^{2016}+66^{2016}$ cifra 1.

Zadatak 2. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva (x,y,z) takve da je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2015}{2016}$.

Rešenje: Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $x\leq y\leq z$. Tada je $\frac{1}{x}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{z}$.
Odavde je $3\cdot\frac{1}{x}\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2015}{2016}$, odnosno $x\leq\frac{6048}{2015}$.
Zaključujemo da $x\in\{1,2,3\}$ i razlikujemo tri slučaja:
1) $\underline{x=1}$ $\quad\frac{2015}{2016}=1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1>\frac{2015}{2016}$, pa je ovaj slučaj nemoguć.

2) $\underline{x=2}$ $\quad \frac{2015}{2016}=\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, odakle je $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1007}{2016}$.

Jasno je da je $y>\frac{2016}{1007}$.

Zbog uvedene pretpostavke o poretku brojeva imamo da je $2\cdot\frac{1}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{1007}{2016}$, odakle se dobija da je $\frac{1}{y}\geq\frac{1007}{4032}$, odnosno $y\leq\frac{4032}{1007}$. Dakle, $y\in\{3,4\}$.

Za $y=3$ dobijamo da je $z=\frac{2016}{335}$, što nije rešenje.

Za $y=4$ dobijamo da je $z=\frac{2016}{503}$, što nije rešenje.

3) $\underline{x=3}$ $\quad \frac{2015}{2016}=\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, odakle je $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1343}{2016}$. Jasno je da je $y>\frac{2016}{1343}$.

Zbog uvedene pretpostavke o poretku brojeva imamo da je $2\cdot\frac{1}{y}\geq\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{1343}{2016}$, odakle se dobija da je $\frac{1}{y}\geq\frac{1343}{4032}$, odnosno $y\leq\frac{4032}{1343}$. Dakle, $y\in\{2,3\}$.

Za $y=2$ dobijamo da je $z=\frac{2016}{335}$, što nije rešenje.

Za $y=3$ dobijamo da je $z=\frac{2016}{621}$, što nije rešenje.

Iz prethodnog sledi da ne postoji trojka prirodnih brojeva (x,y,z) takva da je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2015}{2016}$.

Zadatak 3. Data je jednačina $2x^2+12x+2016=0$. Ne rešavajući ovu jednačinu, sastaviti kvadratnu jednačinu čija su rešenja $y_1=x_1+\frac{3}{x_2}$ i $y_2=x_2+\frac{3}{x_1}$, gde su x_1 i x_2 rešenja polazne jednačine.

Rešenje: U rešavanju ovog zadatka koristićemo Vijetove formule:

$$x_1+\ x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{12}{2}=-6$$

$x_1\,x_2=\frac{c}{a}=-\frac{2016}{2}=1008.$

Odavde je

$$-p=y_1+\ y_2=x_1+\frac{3}{x_2}+x_2+\frac{3}{x_1}=\frac{{x_1}^2x_2+3x_1+x_1{x_2}^2+3x_2}{x_1\,x_2}$$
$$=\frac{(x_1+\ x_2)(x_1\,x_2+3)}{x_1\,x_2}=\frac{-6\cdot(1008+3)}{1008}=-\frac{6066}{1008}=-\frac{674}{112}$$

$$q=y_1y_2=\left(x_1+\frac{3}{x_2}\right)\left(x_2+\frac{3}{x_1}\right)=\left(\frac{x_1\,x_2+3}{x_2}\right)\left(\frac{x_1\,x_2+3}{x_1}\ \right)$$
$$=\frac{(x_1\,x_2+3)(x_1\,x_2+3)}{x_1\,x_2}=\frac{1011\cdot 1011}{1008}=\frac{1022121}{1008}=\frac{113569}{112}$$

pa je tražena jednačina $y^2+py+q=0$, odnosno $112y^2+674y+113569=0$.

Zadatak 4. Odrediti sve prirodne brojeve a, b i c takve da je $a^3 + b^3 + c^3 = 2016$.

Rešenje: Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da važi $a \leq b \leq c$.

Kako je $13^3 = 2197 > 2016 = a^3 + b^3 + c^3$, zaključujemo da je $c < 13$.
Odavde je $3c^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 = 2016$, odnosno $c^3 \geq 672$, pa je $c > 8$.
Zaključujemo da $c \in \{9,10,11,12\}$.

Razmotrimo ova četiri slučaja:

1) $c = 9$ $\quad a^3 + b^3 + 729 = 2016$ tj. $a^3 + b^3 = 1287$

Kako je $11^3 = 1331 > 1287 = a^3 + b^3$, zaključujemo da je $b < 11$. Zbog pretpostavke da je $a \leq b$, imamo da je $2b^3 \geq a^3 + b^3 = 1287$, odnosno $b^3 > \frac{1287}{2}$, pa je $b > 8$. Odavde sledi da $b \in \{9,10\}$.

$\underline{b = 9}$ $\quad a^3 + 729 = 1287$ tj. $a^3 = 558$

$\underline{b = 10}$ $\quad a^3 + 1000 = 1287$ tj. $a^3 = 287$

Kako brojevi 558 i 287 nisu potpuni kubovi, u ovom slučaju nema rešenja.

2) $c = 10$ $\quad a^3 + b^3 + 1000 = 2016$ tj. $a^3 + b^3 = 1016$

Kako je $11^3 = 1331 > 1016 = a^3 + b^3$, zaključujemo da je $b < 11$. Zbog pretpostavke da je $a \leq b$, imamo da je $2b^3 \geq a^3 + b^3 = 1016$, odnosno $b^3 > 508$, pa je $b > 8$. Odavde sledi da $b \in \{9,10\}$.

$\underline{b = 9}$ $\quad a^3 + 729 = 1016$ tj. $a^3 = 287$

$\underline{b = 10}$ $\quad a^3 + 1000 = 1287$ tj. $a^3 = 16$

Kako brojevi 287 i 16 nisu potpuni kubovi, u ovom slučaju nema rešenja.

3) $c = 11$ $\quad a^3 + b^3 + 1331 = 2016$ tj. $a^3 + b^3 = 685$

Kako je $9^3 = 729 > 685 = a^3 + b^3$, zaključujemo da je $b < 9$. Zbog pretpostavke da je $a \leq b$, imamo da je $2b^3 \geq a^3 + b^3 = 685$, odnosno $b^3 > \frac{685}{2}$, pa je $b > 7$. Odavde sledi da je $b = 8$.

$$a^3 + 512 = 685 \text{ tj. } a^3 = 173$$

Kako 173 nije potpun kub, u ovom slučaju nema rešenja.

4) $c = 12$ $\qquad a^3 + b^3 + 1728 = 2016$ tj. $a^3 + b^3 = 288$

Kako je $7^3 = 343 > 288 = a^3 + b^3$, zaključujemo da je $b < 7$. Zbog pretpostavke da je $a \leq b$, imamo da je $2b^3 \geq a^3 + b^3 = 288$, odnosno $b^3 > 144$, pa je $b > 6$.
U ovom slučaju nema prirodnih brojeva koji ispunjavaju uslove slučaja, pa nema rešenja.

Na osnovu svega gore rečenog zaključujemo da ovaj zadatak nema rešenja.

Zadatak 5. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (x, y) za koje je
$2016\,x = y\,(x - 16y)$?

Rešenje: Kako je $x = \frac{16y^2}{y-2016}$, zaključujemo da važi

$$x \in N \Leftrightarrow y - 2016 > 0 \ \wedge \ y - 2016 | 16y^2.$$

Sada je $\frac{16y^2}{y-2016} = \frac{16y^2 - 2016^2 \cdot 16 + 2016^2 \cdot 16}{y-2016} = 16(y + 2016) + \frac{2016^2 \cdot 16}{y-2016}$, pa zaključujemo da $x \in N \Leftrightarrow \ y > 2016 \ \wedge \ y - 2016 | 2016^2 \cdot 16$. Kako je $2016^2 \cdot 16 = 2^{14} \cdot 3^4 \cdot 7^2$, svaki pozitivan delilac broja $2016^2 \cdot 16$ je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, gde je $a \in \{0,1,2,\ldots,14\}$, $b \in \{0,1,2,3,4\}$ i $c \in \{0,1,2\}$. Broj delilaca broja $2016^2 \cdot 16$ je $15 \cdot 5 \cdot 3 = 225$, pa toliko ima i traženih uređenih parova.

Zadatak 6. Ako je $x \cdot p! \cdot q! \cdot r! = 2016$ i ako važi da su p, q i r različiti prirodni brojevi veći od 1, odredi brojeve p, q, r i x.

Rešenje: Fokusirajmo se, za sada, na određivanje brojeva p, q i r.
Kako je $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 > 2016$ i $5 \nmid 2016$, svaki činilac u $p!, q!$ i $r!$ mora da bude 1, 2, 3 ili 4. Zbog uslova zadatka $p < q < r$ lako dolazimo do rešenja.

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$
Zaključujemo da su rešenja za p, q, r sve permutacije uređene trojke $(2, 3, 4)$.
Odavde vidimo da se broj 2 javlja 5 puta i broj 3 javlja 2 puta, što odgovara pomenutom rastavljanju broja 2016. Lako se određuje da je $x = 7$.

Zadatak 7. Uporediti razlomke:

$$\mathrm{A} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2016}}}}, \quad B = 2 + \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{2015}}}} \quad \text{i} \quad C = 2 + \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{2014}}}}.$$

Rešenje: Razlomak $x+\frac{1}{y}$, gde su x i y pozitivni realni brojevi, se poveća ako se x poveća ili y smanji i obrnuto, smanji se ako se x smanji ili y poveća. Analogno razmatranje razlomaka $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$ i $x+\frac{1}{y+\frac{1}{z+\frac{1}{d}}}$ dovodi nas do zaključka da je

$C > B > A$.

Zadatak 8. Odrediti vrednost izraza

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2015^2}+\frac{1}{2016^2}}.$$

Rešenje: Svaki sabirak prethodnog zbira je oblika $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$ i svođenjem na zajednički imenilac postaje $\sqrt{\frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{(n\cdot(n+1))^2}}$. Sređivanjem simetričnog polinoma iz brojioca dobijamo da je $\sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{(n\cdot(n+1))^2}}=\frac{n^2+n+1}{n\cdot(n+1)}=1+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Dakle, vrednost izraza je: $1+1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+1+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}=2016-\frac{1}{2016}$.

Zadatak 9. Ako je zbir nekih 2016 prirodnih brojeva deljiv sa 6, onda je i zbir njihovih kubova deljiv sa 6. Dokazati.

Rešenje: Za svaki prirodan broj a važi da je broj $a^3-a=a(a-1)(a+1)$ deljiv sa 6. Dakle, broj ${a_1}^3-a_1+{a_2}^3-a_2+\ldots+{a_{2016}}^3-a_{2016}$ je deljiv sa 6. Dati izraz možemo napisati u obliku $({a_1}^3+{a_2}^3+\ldots+{a_{2016}}^3)-(a_1+a_2+\ldots+a_{2016})$. Kako je zbir $a_1+a_2+\ldots+a_{2016}$ deljiv sa 6, onda je i zbir kubova ${a_1}^3+{a_2}^3+\ldots+{a_{2016}}^3$ deljiv brojem 6.

Zadatak 10. Odredi cifre a, b i c tako da broj $a2016bc$ bude najveći mogući, deljiv sa 12 i da sve njegove cifre budu različite.

Rešenje: Broj je deljiv sa 12 ako i samo ako je deljiv i sa 3 i sa 4. Broj je deljiv sa 4 ako mu je dvocifreni završetak deljiv sa 4, odakle zaključujemo da je cifra c parna. Zbog uslova o različitosti cifara, jedine mogućnosti za cifru c su 4 i 8. Kako dvocifreni završetak mora biti deljiv sa 4 i cifre različite, jedine mogućnosti za b su takođe cifre 4 i 8. Dakle, poslednje dve cifre, odnosno b i c su, redom, brojevi 8 i 4. Da bi broj bio deljiv sa 3, zbir cifara $a+2+0+1+6+8+4=a+21$ mora biti deljiv sa 3.
Kako bi i ovaj uslov važio, jedine preostale mogućnosti za cifru a su 3 i 9, odakle, zbog uslova da traženi broj bude najveći mogući, dobijamo broj 9201684.

U naredna dva zadatka koristićemo **Dirihleov princip:**

Ako n elemenata rasporedimo u k klasa, $k, n \in N$ i važi da je $n{:}k=q(r), r, q \in N$, $0<r<k$, onda postoji bar jedna klasa koja sadrži $q+1$ element.

Zadatak 11. Na jednom fakultetu ima 2016 studenata. Dokazati da postoje bar 3 studenta koji imaju iste inicijale.

Rešenje: Kako azbuka ima 30 slova, a za inicijale svake osobe uzimamo prvo slovo imena i prvo slovo prezimena, postoji $30 \cdot 30 = 900$ različitih inicijala. Po Dirihleovom principu i činjenici da je $900 \cdot 2 + 216 = 2016$, zaključujemo da postoje bar 3 studenta sa istim inicijalima.

Zadatak 12. Dokazati da u grupi od 2016 osoba rođenih u mesecima koji imaju po 31 dan postoji bar 10 osoba koje su rođene istog dana.

Rešenje: Ako rasporedimo osobe u grupe po danu rođenja, imaćemo 217 grupa. Darihleov princip kaže da svaka grupa sadrži bar $\frac{m-1}{n} + 1$ $(m, n \in N)$ osoba koje su rođene istog dana, odnosno u našem slučaju, $\frac{2016-1}{217} + 1 > 9 + 1 = 10$. Dakle, postoji bar 10 osoba koje su rođene istog dana.

Zadatak 13. Izračunati vrednost izraza:

$$i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + \cdots + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016}$$

Rešenje:

Kako je $i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3, \; k \in N_0, \end{cases}$

razvrstaćemo sabirke u četiri skupa:

1. $i^4 = i^8 = i^{12} = \cdots = i^{2016} = 1$ $(504\ članа)$
2. $i^5 = i^9 = i^{13} = \cdots = i^{2013} = i$ $(503\ člana)$
3. $i^6 = i^{10} = i^{14} = \cdots = i^{2014} = -1$ $(503\ člana)$
4. $i^7 = i^{11} = i^{15} = \cdots = i^{2015} = -i$ $(503\ člana)$

Vrednost izraza jednaka je $504 \cdot 1 + 503 \cdot i + 503 \cdot (-1) + 503 \cdot (-i) = 1$.

Zadatak 14. Izračunaj $a - b + c - 1$ ako je $f(x+1) = x^2 + 2016\,x$ i $f(x+2) + f(x+3) = ax^2 + bx + c$.

Rešenje: Iz uslova $f(x+1) = x^2 + 2016x$ dobijamo da je $f(x) = x^2 + 2014x - 2015$. Kako je $f(x+2) = x^2 + 2018x + 2017$ i $f(x+3) = x^2 + 2020x + 4036$, dobijamo da je $f(x+2) + f(x+3) = 2x^2 + 4038x + 6053$, odnosno

$a = 2,\ b = 4038$ i $c = 6053$, odakle je $a - b + c - 1 = 2016$.

Zadatak 15. Rešiti jednačinu $x^8 + y^{2016} = 72x^4 - 1296$ u skupu realnih brojeva.

Rešenje: Elementarnim transformacijama jednačina se svodi na

$y^{2016} = -(x^8 - 72x^4 + 1296)$, odnosno $y^{2016} = -(x^4 - 36)^2$. Kako je leva strana jednakosti veća od nule ili jednaka nuli, a desna manja od nule ili jednaka nuli, jednakost će važiti ako i samo ako je $y^{2016} = 0$ i $(x^4 - 36)^2 = 0$, odakle dobijamo da je skup rešenja $R = \{(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0), (i\sqrt{6}, 0), (-i\sqrt{6}, 0)\}$.

U narednom zadatku ćemo koristiti posledicu **de Polignakove teoreme**:
Ako je n *prirodan broj a* p *prost broj, onda je najviši stepen broja* p *koji deli broj* n! *određen formulom*

$$\mathrm{e} = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ \dots = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right].$$

Zadatak 16. Odrediti sa koliko se nula završava broj $2016! \cdot 6073!$.
Rešenje: Ako je n prirodan broj, broj $n!$ završava se sa $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \ \dots$ nula, gde je sa $\left[\frac{n}{5^k}\right], k \in N$, označen ceo deo količnika $\frac{n}{5^k}$. Kako je

$$5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, 5^5 = 3125,$$

to sledi da se broj $2016!$ završava sa $\left[\frac{2016}{5}\right] + \left[\frac{2016}{25}\right] + \left[\frac{2016}{125}\right] + \left[\frac{2016}{625}\right] = 502$ nule. Iz istog razloga, broj $6073!$ završava se sa $\left[\frac{6073}{5}\right] + \left[\frac{6073}{25}\right] + \left[\frac{6073}{125}\right] + \left[\frac{6073}{625}\right] + \left[\frac{6073}{3125}\right] = 1514$ nula. Odatle sledi da se proizvod brojeva $2016!$ i $6073!$ završava sa $502 + 1514 = 2016$ nula.

Zadatak 17. Car Hijeron je imao 2016 zlatnika. Među njima se nalazi jedan lažni zlatnik koji je lakši od ostalih zlatnika. Car je zadao zadatak Arhimedu da u najkraćem mogućem roku tačno odredi koji je zlatnik lažni. Na raspolaganju mu je dao dve terazije koje samo određuju koji je tas teži, odnosno lakši, ali, terazije su veoma osetljive pa im treba pet sekundi da pokažu koji je tas teži. Na koji način i za koje vreme će Arhimed sa sigurnošću da odredi koji je zlatnik lakši?

Napomena: Arhimed može da meri zlatnike na obe terazije u isto vreme.

Rešenje: Kako Arhimed ima na raspolaganju dve terazije, za pet sekundi može da izvrši dva merenja. Podelićemo broj zlatnika na pet delova, ali kako broj 2016 nije deljiv sa 5, jedan zlatnik višak ići će sa strane sa petom petinom.
Dakle, na svakom tasu ima po 403 zlatnika i 404 zlatnika sa strane. Ako na nekom tasu budu 403 zlatnika lakša od ostalih dodaćemo 2 zlatnika od ostalih da bismo mogli da ih podelimo ponovo na 5 delova. U slučaju da su 404 zlatnika lakša dodaćemo 1 zlatnik. Merenje teče ovako:

R. br. merenja	Broj zlatnika na prvom tasu prvih terazija	Broj zlatnika na drugom tasu prvih terazija	Broj zlatnika na prvom tasu drugih terazija	Broj zlatnika na drugom tasu drugih terazija	Broj zlatnika sa strane	Ukupan broj zlatnika korišćen pri merenju
1.	403	403	403	403	404	2016
2.	81	81	81	81	81	405
3.	17	17	17	17	17	85
4.	4	4	4	4	4	20
5.	1	1	1	1	1(0)*	5 (4)

*Kako ostaju samo 4 zlatnika, nije potrebno da se dodaje još jedan zlatnik, dovoljno je da se stavi po jedan zlatnik na terazije.
Arhimedu je potrebno najmanje 25 sekundi da odredi koji je zlatnik lakši.

Zadatak 18. Dokazati sledeću jednakost:

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2016}-2016\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{2015}-2015\right)^2}\right)+\left(\sqrt{2016}-\sqrt{2015}\right)=\frac{1+\cos 40°}{2cos^2 20°}$$

Rešenje: Korišćenjem trigonometrijskih funkcija poluuglova desna strana jednakosti je jednaka 1, pa dobijamo da je

$\sqrt{\left(\sqrt{2016}-2016\right)^2}+\sqrt{2016}-\sqrt{\left(\sqrt{2015}-2015\right)^2}-\sqrt{2015}=1.$

Kako je $\sqrt{\left(\sqrt{2016}-2016\right)^2}=\left|\sqrt{2016}-2016\right|=2016-\sqrt{2016}$ i

$\sqrt{\left(\sqrt{2015}-2015\right)^2}=\left|\sqrt{2015}-2015\right|=2015-\sqrt{2015}$, dobijamo da je

$2016-\sqrt{2016}+\sqrt{2016}-2015+\sqrt{2015}-\sqrt{2015}=1$, čime je jednakost dokazana.

Zadatak 19. Rešiti jednačinu:

$$\log_{\sqrt{2016}} x+\log_{\sqrt[4]{2016}} x+\log_{\sqrt[6]{2016}} x+\cdots+\log_{\sqrt[2016]{2016}} x=2016.$$

Rešenje: Korišćenjem osobina stepena sa racionalnim izložiocem i pravila logaritama, leva strana jednačine je jednaka

$\log_{2016^{\frac{1}{2}}} x+\log_{2016^{\frac{1}{4}}} x+\log_{2016^{\frac{1}{6}}} x+\cdots+\log_{2016^{\frac{1}{2016}}} x$, odnosno

$$2\log_{2016} x+4\log_{2016} x+6\log_{2016} x+\cdots+2016\log_{2016} x.$$

Primenom formule za zbir prvih n parnih prirodnih brojeva, $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$, $n\in N$, naša jednačina postaje $1008\cdot 1009\cdot\log_{2016} x=2016$, odakle se dobija da je $\log_{2016} x=\frac{2}{1009}$, odnosno $x=\sqrt[1009]{2016^2}$.

Zadatak 20. Ako je $\alpha=2016°$, uporediti vrednosti $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ i $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Rešenje: Kako je $2016°=180°\cdot 11+36°$, korišćenjem formula za svođenje na I kvadrant dobijamo da je

$$\sin 2016° = -\sin 36°, \ \operatorname{tg} 2016° = \operatorname{tg} 36° \text{ i } \operatorname{ctg} 2016° = \operatorname{ctg} 36°.$$

Zbog činjenice da je $\operatorname{tg} 36° < \operatorname{ctg} 36°$, imamo da je

$$-\sin 36° < \operatorname{tg} 36° < \operatorname{ctg} 36°, \text{ odnosno } \sin 2016° < \operatorname{tg} 2016° < \operatorname{ctg} 2016°.$$

Zadatak 21. Odrediti sva rešenja jednačine

$$2016^x - 2015^x = x, \tag{1}$$

u skupu realnih brojeva.

Rešenje: Ovaj zadatak je samo specijalan slučaj sledećeg problema: Koja su rešenja jednačine

$$B^x - A^x = (B - A)x, \tag{2}$$

po $x \in \mathbb{R}$, gde su A i B proizvoljni pozitivni realni brojevi koji pripadaju istom od intervala $(0,1]$ ili $[1, +\infty)$?

Posmatrajmo funkciju

$$F(A, B) = B^x - A^x - (B - A)x, \tag{3}$$

po promenljivama A i B gde je x konstanta, pri čemu promenljive A i B pripadaju istom od intervala $(0,1]$ ili $[1, +\infty)$. Rešenja jednačine (2) jesu one konstante x za koje se funkcija F anulira. Samu funkciju F moguće je prikazati kao razliku

$$F(A, B) = f(B) - f(A),$$

pri čemu je $f(A) = A^x - Ax$.

Najpre posmatrajmo za koju vrednost konstante x će definisana funkcija F biti nula funkcija. Takvo x će biti rešenje jednačine (2) za proizvoljne pozitivne realne brojeve A i B koji pripadaju istom od intervala $(0,1]$ ili $[1, +\infty)$.

Ako bi funkcija F bila konstantna, to bi značilo da ne zavisi od promenljivih A i B, odnosno važiće da je $f'(A) = f'(B) = 0$. Kako je

$$f'(A) = x(A^{x-1} - 1),$$

pomenuti uslovi biće ispunjeni za $x = 0$ ili $x = 1$. Direktnom proverom utvrđuje se da je u tim slučajevima $F(A, B) = 0$, tj. da su $x = 0$ i $x = 1$ jedna od rešenja jednačine (2).

Potražimo ostala rešenja polazne jednačine, sada na intervalima $(-\infty, 0), (0,1)$ i $(1, +\infty)$. Slučajeve kada je $A = 1$ ili $B = 1$ razmatraćemo naknadno.

1.1 Ukoliko je $x < 0$ i $A, B \in (0,1)$, važiće da je $f'(A) < 0$ $(A \neq 1)$, te je funkcija $f(A)$ strogo opadajuća. Stoga je $f(A) = f(B)$, tj. $F(A, B) = f(B) - f(A) = 0$ ako i samo ako je $A = B$. U tom slučaju, svako $x \in \mathbb{R}$ jeste rešenje jednačine (2).

1.2 Ukoliko je $x < 0$ i $A, B \in (1, +\infty)$ onda je funkcija $f(A)$ strogo rastuća pa je vrednost funkcije $F(A, B) = f(B) - f(A)$ jednaka 0 ako i samo ako je $A = B$. U tom slučaju, svako $x \in \mathbb{R}$ jeste rešenje jednačine (2).

1.3 Ukoliko je $0 < x < 1$ i $A, B \in (0,1)$ onda je funkcija $f(A)$ strogo rastuća pa je vrednost funkcije $F(A, B) = f(B) - f(A)$ jednaka 0 ako i samo ako je $A = B$. U tom slučaju, svako $x \in \mathbb{R}$ jeste rešenje jednačine (2).

1.4 Ukoliko je $0 < x < 1$ i $A, B \in (1, +\infty)$ onda je funkcija $f(A)$ strogo opadajuća pa je vrednost funkcije $F(A, B) = f(B) - f(A)$ jednaka 0 ako i samo ako je $A = B$. U tom slučaju, svako $x \in \mathbb{R}$ jeste rešenje jednačine (2).

1.5 Ukoliko je $x > 1$ i $A, B \in (0,1)$ onda je funkcija $f(A)$ strogo opadajuća pa je vrednost funkcije $F(A, B) = f(B) - f(A)$ jednaka 0 ako i samo ako je $A = B$. U tom slučaju, svako $x \in \mathbb{R}$ jeste rešenje jednačine (2).

1.6 Ukoliko je $x > 1$ i $A, B \in (1, +\infty)$ onda je funkcija $f(A)$ strogo rastuća pa je vrednost funkcije $F(A, B) = f(B) - f(A)$ jednaka 0 ako i samo ako je $A = B$. U tom slučaju, svako $x \in \mathbb{R}$ jeste rešenje jednačine (2).

Ostaje još da proverimo šta se dešava u slučaju kada je $A = 1$ ili $B = 1$. Pretpostavimo da je $B = 1$. Tada jednačina (2) dobija oblik

$$1 - A^x = (1 - A)x. \tag{4}$$

I jednačina (4) ima svoj funkcionalni oblik

$$g(A) = 1 - A^x - (1 - A)x, \tag{5}$$

po promenljivoj A, gde je x konstanta. Jasno je da su sva rešenja jednačine (4) one konstante x za koje funkcija $g(A)$ ima vrednost 0. Prvi izvod te funkcije, po A, jednak je

$$g^{'}(A) = -x(A^{x-1} - 1).$$

Jednostavno je primetiti da je u slučaju $A = 1$, svaki relan broj x rešenje jednačine (4). Razmotrimo sada slučaj $B = 1, x \neq 0, x \neq 1$. U razmatranje ćemo uključiti vrednost $A = 1$, ali ćemo rešenja jednačine (4) tražiti samo za $A \neq 1$. Slučaj $A = 1$ već je razmotren a potrebno je obratiti pažnju na veličinu $g(1) = 0$. U tom slučaju postoje sledeći podslučajevi:

2.1. Ukoliko je $x < 0$ i $A \in (0,1]$ važi da je $g'(A) > 0$ pa je funkcija g strogo rastuća. Kako je, za svako x i svako $A \in (0,1)$, $g(A) > g(1) = 0$ to sledi da, u ovom podslučaju, jednačina (4) nema rešenja različitih od $A = 1$.

2.2. Ukoliko je $x < 0$ i $A \in [1, +\infty)$ važi da je $g'(A) < 0$ pa je funkcija g strogo opadajuća. Odatle sledi da je $g(A) < g(1) = 0$ pa ni u ovom podslučaju jednačina (4) nema rešenja u intevalu $(1, +\infty)$.

2.3. Ukoliko je $x \in (0, 1)$ i $A \in (0,1]$ važi da je $g^{'}(A) < 0$, odnosno funkcija g je strogo opadajuća. To znači da je $g(A) < g(1) = 0$ pa u ovom podslučaju jednačina (4) nema rešenja rešenja u intervalu $(0,1)$.

2.4. Ukoliko je $x \in (0,1)$ i $A \in [1, +\infty)$ onda je $g^{'}(A) > 0$ pa je funkcija g strogo rastuća. Odatle sledi da je $g(A) < g(1) = 0$ pa jednačina (4) ni u ovom podslučaju nema rešenja u intervalu $(1, +\infty)$.

2.5. Ukoliko je $x \in (1, +\infty)$ i $A \in (0,1]$ onda je $g^{'}(A) > 0$, tj. funkcija g je strogo rastuća, pa je $g(A) > g(1) = 0$ što znači da u ovom podslučaju jednačina (4) nema rešenja različita od $A = 1$.

2.6. Ukoliko je $x \in (1, +\infty)$ i $A \in [1, +\infty)$ važiće da je $g^{'}(A) < 0$ pa je, kako je funkcija g strogo opadajuća, $g(A) < g(1) = 0$ odnosno, ni u ovom slučaju, jednačina (4) nema rešenja različita od 1.

Zaključci 2.1-2.6. upotpunili su zaključke 1.1-1.6. i, na taj način, dolazi se do sledećih glavnih zaključaka u vezi sa jednačinom (2):

- Ukoliko je $A = B$ onda je svako $x \in \mathbb{R}$ rešenje jednačine (2).
- Ukoliko je $A \neq B$ i $A, B \in (0,1]$ ili $A, B \in [1, +\infty)$ onda su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ jedina rešenja jednačine (2).

Naposletku, jednačina (1) ima oblik

$$2016^x - 2015^x = x,$$

ili ekvivalentno

$$2016^x - 2015^x = (2016 - 2015)x.$$

Kako je $2015 \neq 2016$ i kako je $2015 > 1$ i $2016 > 1$ to, na osnovu poslednja dva zaključka, sledi da su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$ jedina rešenja jednačine (1).

Zadatak 22. Rešiti sistem jednačina

$$\begin{cases} |\sin x|^{\sqrt{2016}} - e^{\frac{x}{y}} = \left(|\sin x| - e^{\frac{x}{y\sqrt{2016}}}\right)\sqrt{2016}, \\ \sin^2 x + e^{\frac{x}{y\sqrt{504}}} = 1, \end{cases} \tag{6}$$

u skupu realnih brojeva.

Rešenje: Zbog deljenja sa y, iz obe jednačine sistema (6) sledi da je $y \neq 0$.

Iz druge jednačine, a kako je $\sin^2 x \in [0,1]$, sledi da je $e^{\frac{x}{y\sqrt{504}}} \in (0,1]$, odnosno $\frac{x}{y} < 0$. U slučaju da je $\sin x = 0$, iz prve jednačine sistema bi, nakon jednostavnog računa, sledilo da je $e^{\frac{x}{y}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2016}}\right)} = \sqrt{2016}$ odakle sledi da je $\frac{x}{y} > 0$ što je kontradikcija sa prethodnim zaključkom o neophodnoj negativnosti količnika $\frac{x}{y}$.

Neka je uređen par (x_0, y_0) rešenje sistema jednačina (6). Prva od jednačina tog sistema može se transformisati u

$$|\sin x|^{\sqrt{2016}} - \left(e^{\frac{x}{y\sqrt{2016}}}\right)^{\sqrt{2016}} = \left(|\sin x| - e^{\frac{x}{y\sqrt{2016}}}\right)\sqrt{2016}, \tag{7}$$

odakle sledi da je $p_0 = \sqrt{2016}$ rešenje jednačine

$$B^p - A^p = (B - A)p,$$

pri čemu je $A = e^{\frac{x}{y\sqrt{2016}}}$ i $B = |\sin x|$. Kako je $p_0 = \sqrt{2016} > 1$, to na osnovu prethodnog zadatka sledi da, da bi jednakost $B^{p_0} - A^{p_0} = (B - A)p_0$ važila, mora biti ispunjeno $A_0 = B_0$, odnosno $|\sin x_0| = e^{\frac{x_0}{y_0\sqrt{2016}}}$.

Druga jednačina sistema se može transformisati u

$$|\sin x|^2 + \left(e^{\frac{x}{y\sqrt{2016}}}\right)^2 = 1.$$

Kako je, u ovom slučaju, $A = B$, gde su A i B promenljive korišćene pri rešavanju jednačine (2), to iz prethodne jednačine sledi da je $|\sin x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, odnosno $x_{0_1} = \frac{(8k-1)\pi}{4}$

i $x_{0_2} = \frac{(8k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. Oba, ovako zadata rešenja x_0 jesu potencijalna rešenja sistema (6).

Kako je $\sin^2 x_{0_1} = \sin^2 \mathrm{x}_{0_2} = \frac{1}{2}$ to je, na osnovu druge jednačine sistema (6), $e^{\frac{x_0}{y\sqrt{2016}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, odakle je $y_0 = -\frac{x_0}{\ln 2^{\sqrt{504}}}$ odgovarajuće y koje učestvuje u rešenju sistema (6).

Oba rešenja x_0 jesu iracionalni brojevi, pa su samim tim, različita od 0 što dokazuje da su i odgovarajuća rešenja y_0 takođe različita od 0. Odatle sledi da su rešenja sistema (6) uređeni parovi

$$\left(\frac{(8k-1)\pi}{4}, -\frac{\frac{(8k-1)\pi}{4}}{\ln 2^{\sqrt{504}}}\right) \text{ i } \left(\frac{(8k+1)\pi}{4}, -\frac{\frac{(8k+1)\pi}{4}}{\ln 2^{\sqrt{504}}}\right) k \in \mathbb{Z}$$

Zadatak 23. U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$2016^{\sin 2015x} - 2015^{\sin 2016x} = \left(2016 - 2015^{\frac{\sin 2016x}{\sin 2015x}}\right) \sin 2015x, \tag{8}$$

pri čemu je $2016^{\sin 2015x} - 2015^{\sin 2016x} \neq 0$.

Rešenje: Na osnovu jednačine (8) sledi da je $\sin 2015x \neq 0$. Odatle sledi da je ekvivalentni oblik te jednačine

$$2016^{\sin 2015x} - \left(2015^{\frac{\sin 2016x}{\sin 2015x}}\right)^{\sin 2015x} = \left(2016 - 2015^{\frac{\sin 2016x}{\sin 2015x}}\right) \sin 2015x.$$

Ova jednačina ima oblik jednačine (2) iz rešenja zadatka 21. Kako je $2016^{\sin 2015x} - 2015^{\sin 2016x} \neq 0$ to sledi da je $2016 \neq 2015^{\frac{\sin 2016x}{\sin 2015x}}$. Na osnovu rezultata prikazanog u rešenju zadatka 21, u vezi sa jednačinom (2), dobija se da je $\sin 2015x = 1$ odakle sledi da je familija $x_k = \frac{\pi}{4030} + \frac{2k}{2015}\pi, k \in \mathbb{Z}$, jeste sačinjena od potencijalnih rešenja jednačine (8).

Ispitajmo još da li su svi članovi familije x_k rešenja jednačine (8), tačnije ispitajmo da li je zadovoljen dodatni uslov $2016^{\sin 2015x_k} - 2015^{\sin 2016x_k} \neq 0$. Neka neko x_{k_0} zadovoljava jednakost

$$2016^{\sin 2015x_{k_0}} - 2015^{\sin 2016\, x_{k_0}} = 0$$

Kako je $\sin 2015x_{k_0} = 1$ to prethodna jednakost postaje

$$2016 = 2015^{\sin 2016x_{k_0}}.$$

Logaritmovanjem poslednje jednakosti za osnovu 2015 dobija se da je

$$\sin 2016\mathrm{x}_{\mathrm{k}_0} = \log_{2015} 2016 > 1,$$

što je kontradikcija, pa su sve veličine x_k rešenja jednačine (8).

Literatura

[1] V. Andrić, *Matematika X = 1236, Priručnik za pripremanje za takmičenje učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda*, Krug, Beograd 2006.

[2] V. Baltić, D. Đukić, Đ. Krtinić, I. Matić, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd 2008.

[3] V. T. Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[4] Đ. Baralić, *300 pripremnih zadataka za juniorske matematičke olimpijade: iskustvo Srbije*, Klet, Beograd 2014.

[5] S. B. Branković, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole*, odabrana poglavlja, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.

[6] N. O. Vesić, D. J. Simjanović, *Još jedan pristup rešavanju jednačina u skupu realnih brojeva*, Nastava matematike, LVI, 3-4 (2011), 18–22.

[7] Društvo matematičara Srbije, *Matematički list za učenike osnovnih škola*, brojevi 5 i 6 godina 1998/99.

[8] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, *Analiza sa algebrom 2*, Krug, Beograd 2002.

[9] Z. Kadelburg, P. Mladenović, *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, Beograd 1990.

[10] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva, materijali za mlade matematičare, sveska 15*, DMS, Beograd 2004.

[11] D. J. Simjanović, M. D. Veljković, K. S. Golubović, *Zanimljivi zadaci o broju 2015*, Matematika i informatika 2 (4) (2015) 1-13.

[12] D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Broj 2014 u algebarskim zadacima*, Nastava matematike, LVIII, 1-2 (2013), 53–60.

[13] D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Zanimljivi algebarski zadaci sa brojem 2012*, Nastava matematike, LVII_1-2, (2012) 45-51

[14] M. Stanić, N. Ikodinović, *Teorija brojeva – zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2004.

[15] *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici „Zadaci iz matematike“ časopisa *Tangenta* 1995–2005. godine, priredio B. Popović, DMS, Beograd 2006.